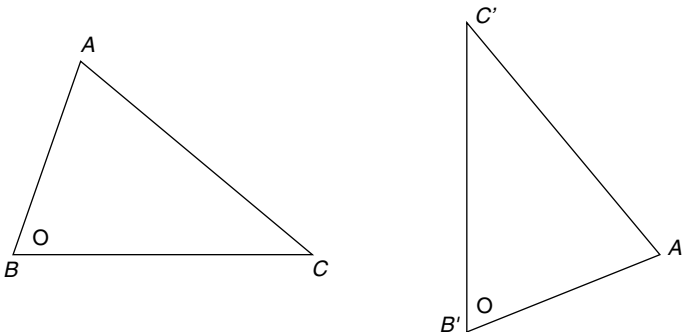


## WAS IST MATHEMATIK?

Wenn von Mathematik die Rede ist, sind Beispiele wünschenswert. Die Beispiele in diesem Kapitel sind leicht; die Leser seien jedoch davor gewarnt, dem natürlichen Reflex nachzugeben und scheinbar technisches Zeug schneller durchzulesen. Im Gegenteil sollte man sein Tempo drosseln! Also, auf geht's.

Man betrachte zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$ , wobei gelte  $|AB| = |A'B'|$ . (Das bedeutet: Die Seite  $AB$  ist ebenso lang wie die Seite  $A'B'$ .) Weiterhin gelte, dass  $|BC| = |B'C'|$  und dass die Winkel bei  $B$  bzw.  $B'$  in den Dreiecken  $ABC$  bzw.  $A'B'C'$  identisch seien.

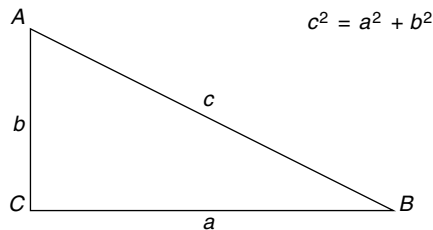


Aus all diesen Dingen folgt, dass die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  gleich oder, wie man sagt, *kongruent* sind. Das bedeutet: Auf ein Blatt Papier gezeichnet und mit einer Schere ausgeschnitten, lassen sich

beide Dreiecke durch Verschieben zur exakten Deckung bringen. (Vielleicht muss man zunächst eines der beiden Dreiecke umdrehen und mit der Unterseite nach oben auf das andere legen.) Mit Hilfe der Papierdreiecke lässt sich weiterhin darstellen, was mit *gleichen Seiten* gemeint ist (man kann sie zur exakten Deckung bringen) oder auch mit *gleichen Winkeln* (*dito*).

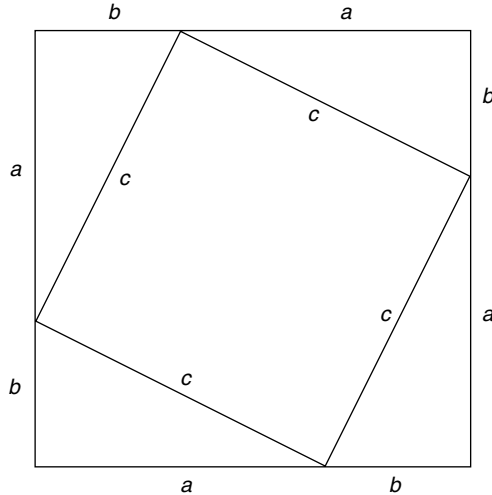
Wenn Sie die Sprache, in der dieses Buch geschrieben ist, einigermaßen gut beherrschen und über ein Mindestmaß an räumlichem Vorstellungsvermögen verfügen, werden Sie die oben dargelegten Überlegungen verstanden und mit großer Wahrscheinlichkeit todlangweilig gefunden haben. Tatsächlich werden Ihnen diese Überlegungen, sobald Sie verstanden haben, was genau gemeint ist, vermutlich furchtbar trivial und offensichtlich erscheinen. Wie nur hat man je über „geometrische Sätze“ wie den eben erläuterten in Begeisterung geraten können? Aus reinem Spaß an der Freude formulieren wir ihn nochmals: *Wenn zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Längen  $|AB| = |A'B'|$  und  $|BC| = |B'C'|$  besitzen und der Winkel in  $B$  für  $ABC$  und der Winkel in  $B'$  für  $A'B'C'$  gleich sind, dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent.* Gleichermäßen zutreffend ist: *Wenn für die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  gilt:  $|AB| = |A'B'|$ ,  $|BC| = |B'C'|$  und  $|CA| = |C'A'|$ , dann sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent.*

Tatsächlich aber lassen sich aus ziemlich offensichtlichen Behauptungen wie dieser mit unfehlbarer Logik interessantere Ergebnisse wie der Satz des Pythagoras ableiten:<sup>1</sup> *Ist der Winkel in  $B$  im Dreieck  $ABC$  ein rechter Winkel,\* so gilt  $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ .*



\* Was ein rechter Winkel ist, wissen Sie; wenn Sie jedoch darauf bestehen, will ich Ihnen gern eine Definition nennen: Sind die vier Winkel eines Vierecks gleich, so sind es rechte Winkel (und das Viereck ist ein Rechteck).

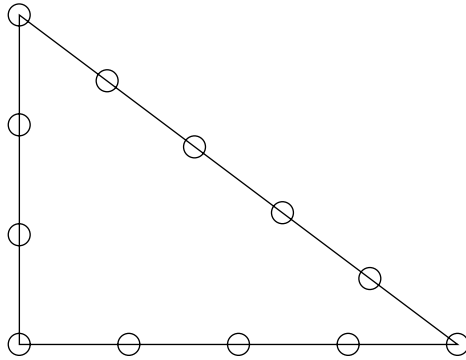
Ein Beweis für dieses Ergebnis wird bei eingehender Betrachtung der folgenden Abbildung erkennbar:



Das große Quadrat besitzt die Fläche  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  und setzt sich aus einem kleinen Quadrat mit der Fläche  $c^2$  sowie vier Dreiecken mit einer Fläche von jeweils  $ab/2$  zusammen, daher gilt:  $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$  oder  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Den Satz des Pythagoras zu kennen, ist hilfreich. Mit seiner Hilfe können wir beispielsweise ein Stück Schnur zu einem rechten Winkel legen. Das geht folgendermaßen: Wir markieren die Schnur, indem wir sie in zwölf Segmente von gleicher Länge aufteilen (diese Länge können wir *Elle* nennen). Unsere Schnur legen wir anschließend zu einem Dreieck, dessen Seitenlängen aus 3, 4 und 5 Ellen bestehen: Der Winkel zwischen den 3 und 4 Ellen langen Seiten ist ein rechter Winkel.

Man betrachte nämlich ein Dreieck mit einem rechten Winkel zwischen den Seitenlängen von 3 und 4 Ellen. Da  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ , beträgt die Länge der dritten Seite des Dreiecks gemäß dem Satz des Pythagoras 5 Ellen. Wir erhalten somit ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 Ellen und einem rechten Winkel zwischen den beiden erstgenannten Seiten. Nun wissen wir aber, dass zwei Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen kongruent sind. Infolgedessen hat jedes Dreieck



mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 Ellen zwischen den Seiten der Längen 3 und 4 Ellen einen rechten Winkel. Die Griechen der Antike diskutierten leidenschaftlich gern und schätzten die Geometrie, weil sie ihnen die Möglichkeit gab, zu diskutieren und zu unwiderlegbaren Schlussfolgerungen zu gelangen. Bei der Geometrie geht es, wie Platon feststellte, um Erkenntnis und nicht einfach um Ansichten. Im 7. Buch von „Der Staat“ zählt er die Geometrie zu den Pflichtfächern der Philosophen, die in seiner idealen Stadt regieren würden. In einer sehr modernen Abhandlung weist Platon darauf hin, dass die Geometrie von praktischem Nutzen ist, ihre wahre Bedeutung jedoch anderswo liegt: „Die Geometrie ist doch die Erkenntnis des immer Seienden. Sie zieht die Seele zur Wahrheit hin und wirkt philosophisches Denken in uns.“ Hier bezieht Platon sich auf die Geometrie der Ebene und erwähnt die (zu seinen Lebzeiten) fehlende Entwicklung einer räumlichen Geometrie, über die er mit Bedauern feststellt: „Ihre Erforschung [wird] ihrer Schwierigkeit wegen ohne Nachdruck betrieben.“<sup>2</sup>

Weniger als ein Jahrhundert nach Platons „Staat“ erscheinen (um 300 v. Chr.) Euklids „Elemente“.<sup>3</sup> Die „Elemente“ geben eine strikt logische Darstellung der Geometrie: Eine Abfolge von (als *Theoreme* bezeichneten) Behauptungen, die durch strenge Ableitungsregeln miteinander verbunden sind. Begonnen wird mit einer Auswahl an Behauptungen, von deren Richtigkeit man ausgeht (im modernen Sprachgebrauch werden sie *Axiome* genannt), anschließend gehen aus den Regeln der Ableitung Theoreme hervor, welche die Geometrie bilden.

Moderne Mathematiker sind bei der Formulierung von Axiomen und dem Beweis von Theoremen etwas pingeliger, als Euklid es war. Insbesondere David Hilbert<sup>4</sup> hat aufgezeigt, dass bei einer wirklich rigiden Vorgehensweise an die Stelle von Euklids intuitiven Gedanken (beim Betrachten von Zahlen) teilweise zusätzliche Axiome und eine penible Beweisführung treten müssten. Das Bemerkenswerte ist jedoch, dass die moderne Mathematik exakt so betrieben wird, wie Euklid die Geometrie dargestellt hat.

Noch einmal: Mathematik setzt sich aus Behauptungen – wie jener über kongruente Dreiecke oder dem Lehrsatz des Pythagoras – zusammen, die durch sehr strenge Ableitungsregeln miteinander verknüpft sind. Wenn Sie über die Ableitungsregeln und eine erste Auswahl von als richtig angenommenen Behauptungen (sogenannte *Axiome*) verfügen, dann können Sie daraus eine Vielzahl weiterer richtiger Behauptungen (sogenannte *Theoreme*) ableiten. Die Ableitungsregeln sind der logische Mechanismus der Mathematik, in den Axiomen sind die grundlegenden Eigenschaften der untersuchten Objekte enthalten (in der Geometrie können dies Punkte sein, Liniensegmente, Winkel usw.). Bei der Auswahl der Ableitungsregeln besteht eine gewisse Flexibilität, bei den Axiomen hat man zahlreiche Auswahlmöglichkeiten. Sind diese Entscheidungen einmal getroffen, haben Sie alles, was Sie brauchen, um Mathematik zu betreiben.

Eine mögliche Katastrophe besteht darin, auf einen Widerspruch zu stoßen, mit anderen Worten also zu beweisen, dass eine Behauptung gleichzeitig richtig und falsch ist. Dies gibt Anlass zu ernsthafter Sorge, denn Kurt Gödel<sup>5</sup> hat aufgezeigt, dass sich (in interessanten Fällen) nicht beweisen lässt, dass ein Axiomensystem nicht zu Widersprüchen führt. Dennoch lässt sich getrost behaupten, dass der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz den Mathematikern nicht jeden Schlaf raubt. Damit will ich sagen, dass sich die meisten Mathematiker von Gödel nicht aus ihrer Alltagsroutine bringen lassen: Sie erwarten nicht, dass in ihrer Arbeit plötzlich ein Widerspruch auftaucht. Wir können das Problem des Widerspruchs daher fürs Erste beiseite lassen und uns der „realen“ Mathematik zuwenden, wie sie im Regelfall von Mathematikern betrieben wird.

Mathematik, wie Mathematiker sie betreiben, ist nicht nur das Anhäufen von logisch aus den Axiomen abgeleiteten Behauptungen. Die Mehrzahl solcher Behauptungen sind selbst dann wertlos, wenn sie vollkommen richtig sind. Ein guter Mathematiker aber wird nach *interessanten* Ergebnissen suchen. Diese interessanten Ergebnisse, oder Theoreme, fügen sich zu bedeutungsvollen und natürlichen Strukturen zusammen; das Ziel der Mathematik ließe sich also als eine Suche nach diesen Strukturen und deren Untersuchung beschreiben.

An dieser Stelle jedoch ist Vorsicht geboten. Mit meiner Behauptung, dass sich die Mathematik in bedeutungsvolle und natürliche Strukturen ordnet, bin ich der mehrheitlichen Ansicht der Mathematiker gefolgt. Doch warum muss das so sein? Und überhaupt – was ist damit gemeint? Das sind schwierige Fragen, mit denen wir uns im folgenden und in späteren Kapiteln auseinandersetzen werden. Zuvor jedoch wollen wir uns der Rolle der Sprache in der Mathematik zuwenden.

Wenn ich sage: „Man betrachte zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$ , wobei gelte  $|AB| = |A'B'|$ ,  $|BC| = |B'C'|$  ...“, bediene ich mich der deutschen Sprache. Mehr oder weniger. Wichtig ist hier nicht, dass Mathematiker ein schlechtes Deutsch (oder Englisch) sprechen, sondern dass sie überhaupt eine Sprache verwenden. Mathematische Arbeit wird unter Verwendung einer natürlichen Sprache verrichtet (Altgriechisch, Englisch oder Deutsch zum Beispiel), ergänzt durch technische Symbole und Fachjargon. Nun hatten wir die Mathematik als aus Behauptungen bestehend beschrieben, die durch sehr strenge Ableitungsregeln miteinander verbunden sind, sehen aber jetzt, dass die Behauptungen und Ableitungen in einer natürlichen Sprache dargestellt sind, die gerade nicht sehr strengen Regeln folgt. Natürlich gibt es grammatische Regeln; sie sind jedoch so wirr und ungenau, dass die maschinelle Übersetzung von einer natürlichen Sprache in eine andere ein schwieriges Problem darstellt. Sollte die Entwicklung der Mathematik daher von einer fundierten Kenntnis der Struktur natürlicher Sprachen abhängen? Das wäre eine ziemliche Katastrophe.

Den Ausweg aus dieser Bedrängnis zeigt uns der Nachweis, dass wir im Prinzip auf eine natürliche Sprache wie Deutsch oder Englisch verzichten können. Mathematik lässt sich als der Umgang mit forma-

len symbolischen Ausdrücken („Formeln“) darstellen, wobei für diesen Umgang absolut strenge Regeln gelten und jede Spur der Ungenauigkeit natürlicher Sprachen fehlt. Mit anderen Worten: Die Mathematik lässt sich *im Prinzip* vollkommen formalisiert darstellen. Warum nur im Prinzip und nicht tatsächlich? Weil eine formalisierte Mathematik so unhandlich und undurchsichtig wäre, dass sie in der Praxis vollkommen unbeherrschbar wäre.

Wir können also behaupten, dass die Mathematik, wie sie derzeit von Mathematikern praktiziert wird, eine Diskussion (in natürlicher Sprache, ergänzt durch Formeln und Fachbegriffe) über einen formalisierten Text ist, der ungeschrieben bleibt. Es gibt recht überzeugende Argumente dafür, dass der formalisierte Text niedergeschrieben werden könnte; dennoch geschieht dies nicht. Tatsächlich wäre ein formalisierter Text über interessante Mathematik viel zu lang und für einen menschlichen Mathematiker zudem ziemlich unverständlich.

Mathematische Texte stehen somit in einem ständigen Spannungsfeld: Die Notwendigkeit der Strenge zwingt zu einem formalisierten Stil, gleichzeitig zwingt die Notwendigkeit, verständlich zu sein, zu einer informellen Erläuterung mit Hilfe der Ausdrucksmittel einer natürlichen Sprache. Es gibt einige Tricks, die uns das Leben leichter machen. Eine wichtige Rolle spielen *Definitionen*: Man ersetzt eine komplizierte Beschreibung (etwa die eines regelmäßigen Dodekahedrons) durch einen einfachen Begriff („regelmäßiges Dodekahedron“) oder einen komplizierten symbolischen Ausdruck durch ein einfaches Symbol. Auch *Sprachverstöße* sind erlaubt: ein gewisses Maß an kontrollierter Nachlässigkeit, die keine Schwierigkeiten mit sich bringt. Man beachte, dass sich ein durchgängig formalisierter Text mechanisch, etwa durch einen Computer, auf Fehler überprüfen ließe. Bei einem gewöhnlichen mathematischen Text hingegen muss man sich auf die einigermaßen fehlbare Intelligenz eines menschlichen Mathematikers verlassen.

Verschiedene Mathematiker pflegen verschiedene Ausdrucksweisen. Im Idealfall ist ihr Stil klar, elegant und schön. Moderne Beispiele sind der *Cours d'arithmétique*<sup>6</sup> von Jean-Pierre Serre und die Rezension „Differentiable dynamical systems“<sup>7</sup> von Steve Smale. In ihrem Stil sind diese beiden Texte sehr unterschiedlich – Serre drückt sich formaler

aus, Smale weniger formal. Smale verwendet handgezeichnete Abbildungen, um seine mathematischen Konstruktionen zu erklären, was Serre vermeiden würde. Trotz der deutlichen stilistischen Unterschiede aber würden wohl die meisten Mathematiker Serres Buch und Smales Artikel als Meisterwerke der schriftlichen Arbeit bezeichnen.