Julian Havil

Das gibt's doch nicht

Mathematische Rätsel

Aus dem Englischen übersetzt von Michael Zillgitt

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Autor
Julian Havil

Titel der Originalausgabe: Impossible? – Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums

Aus dem Englischen übersetzt von Michael Zillgitt

Die amerikanische und englische Originalausgabe sind erschienen bei Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540, USA und bei Princeton University Press, 6 Oxford Street, Woodstock, Oxfordshire OX20 1TW

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

09 10 11 12 13 5 4 3 2 1

Planung und Lektorat: Katharina Neuser-von Oettingen, Sabine Bartels
Redaktion: Regine Zimmerschied
LaTeX-Satzdaten: Michael Zillgitt
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Umschlaggestaltung: wsp design Werbeagentur GmbH, Heidelberg
Titelfotografie: © Fotolia

ISBN 978-3-8274-2306-1

Inhaltsverzeichnis

Claude Shannon und John Tukey zusammenarbeitete. Diese drei Wissenschaftler legten den Grundstein zur Informationstheorie. Hamming untersuchte die Datensicherheit in den damaligen IBM-Computern und entwickelte die heute nach ihm benannten Hamming-Codes zum Schutz von Programmen und Daten. Noch heute leisten diese Codes gute Dienste bei zufällig auftretenden Fehlern in modernen Computer-RAMs.

Mit $H(n,d)$ bezeichnet man einen Hamming-Code mit einem binären Vektor der Länge n zum Schutz von binären Datensätzen der Länge d. Dabei werden 2^d Codewörter durch $2^n - 2^d$ Vektoren geschützt. Unser oben dargestellter Wiederholungscode mit den Drillingen von Binärziffern ist also ein $H(3,1)$-Code. Aber nun interessieren wir uns für den $H(7,4)$-Code. Eine seiner Versionen umfasst folgende Codewörter:

$$\begin{pmatrix} 0000000 & 0001011 & 0010111 & 0011100 \\ 0100101 & 0101110 & 0101110 & 0111001 \\ 1000110 & 1001101 & 1010001 & 1011010 \\ 1011010 & 1101000 & 1110100 & 1111111 \end{pmatrix}.$$

Hier unterscheiden sich alle Vektoren in drei Stellen voneinander. Daher kann dieser Code bis zu drei Fehler entdecken und auch einen einzelnen Fehler korrigieren – und mehr brauchen wir nicht. Die $2^7 = 128$ möglichen Vektoren werden in 16 Achtergruppen aufgeteilt. Jede von ihnen enthält das jeweils gesendete Codewort und die sieben Nachbarvektoren, die sich von ihm in genau einer Stelle unterscheiden. Beim ersten Codewort 0000000 sieht diese Achtergruppe so aus:

$$\begin{pmatrix} 0000000 & 0000001 & 0000010 & 0000100 \\ 0001000 & 0010000 & 0100000 & 1000000 \end{pmatrix}.$$

Hamming und die Hüte

Nun zurück zu unseren Hüten. Wir nehmen n Hutträger an und codieren einen roten Hut durch eine 0 sowie einen blauen Hut durch eine 1. Dann kann jede Hütekonfiguration als Vektor der Länge n ausgedrückt werden. Wenn wir den Hamming-Code mit dieser Länge betrachten, kann die Hütekonfiguration durch ein Codewort oder einen Nachbarn dargestellt werden. Auf dieser Tatsache beruht die anzuwendende Strategie.

Bei unserem obigen Drei-Hüte-Rätsel bzw. bei einem $H(3,1)$-Code lautete die Strategie:

1. Wenn Sie zwei Hüte gleicher Farbe sehen, raten Sie die andere Farbe.
2. Wenn Sie zwei Hüte mit unterschiedlichen Farben sehen, passen Sie.

Diese müssen wir in die folgende neue Strategie umsetzen, wobei ein Vektor der Verteilung der sichtbaren Hutfarben und eine Binärziffer einer Hutfarbe entspricht:

1. Wenn Sie einen Vektor sehen, der ein Codewort sein kann, wählen Sie Ihre Binärziffer so, dass er *kein* Codewort ist.
2. Andernfalls passen Sie.

Wenn der gewählte Vektor zufällig ein Codewort ist (z. B. 000, wenn alle Hüte rot sind), dann sieht jeder der drei Spieler diese Möglichkeit und trifft seine Wahl so, dass das Codewort vermieden wird; er rät also blau (d. h. eine 1). Damit liegen alle drei Spieler an einer Stelle falsch. Ist der Vektor aber kein Codewort, so meint nur ein Spieler, dass er eines sein könnte. Er wählt daher den geeigneten nächsten Nachbarn und liegt damit richtig. Wenn die anderen beiden Spieler dabei passen, gewinnt das Team.

Bei der vorhin erwähnten Zusatzaufgabe mussten Todd Eberts Studenten den $H(7,4)$-Code verwenden und genau die gleiche Änderung an der Strategie vornehmen. Sie lautet hierfür:

1. Wenn Sie einen Vektor sehen, der ein Codewort sein kann, wählen Sie Ihre Binärziffer so, dass er *kein* Codewort ist.
2. Andernfalls passen Sie.

Die gleiche Überlegung wie zuvor stellt sicher, dass alle Spieler falsch liegen, wenn die Konfiguration ein Codewort ist, und andernfalls alle Spieler außer einem passen. Dieser vermeidet ja das Codewort und wählt dessen geeigneten nächsten Nachbarn. Damit ergibt sich die Gewinnchance des Teams zu

$$\frac{2^7 - 2^4}{2^7} = \frac{7}{8}.$$

Aber eine Frage bleibt noch: Warum wurde für die Hutträger die Anzahl sieben gewählt? Damit der dargestellte Ansatz funktioniert, müssen die Vektoren genau so aufgeteilt sein, wie wir es getan haben: Bei n Hutträgern, also bei der Länge n des Codeworts, muss die Menge der aus Nullen und Einsen bestehenden 2^n Vektoren in Gruppen aufgeteilt werden. Von diesen enthält jede in ihrer Mitte ein Codewort sowie die n Vektoren, die sich in einer einzigen Stelle vom Codewort unterscheiden. Die Gruppen enthalten daher jeweils $n+1$ Vektoren, sodass $n + 1$ ein Faktor von 2^n und somit auch selbst eine Potenz von 2 sein muss, zum Beispiel 2^m. Dann gilt $n + 1 = 2^m$ und $n = 2^m - 1$. Wichtig ist: Bei einer Anzahl C von Codewörtern gilt $(n+1)C = 2^n$ und damit $2^m C = 2^n$ sowie $C = 2^{n-m}$.

Bei $m = 2$ liegt das ursprüngliche Drei-Hüte-Problem vor und bei $m = 3$ die Zusatzaufgabe für die Studenten. (Natürlich kann das Verfahren auch auf andere Werte von n angepasst werden.) Im allgemeinen Fall, bei n Hutträgern, müssen wir den $H(n, n-m)$-Code mit 2^{n-m} Codewörtern und 2^n Vektoren betrachten. Dabei ist die Gewinnchance des Teams

$$\frac{2^n - 2^{n-m}}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^m} = \frac{2^m - 1}{2^m} = \frac{n}{n+1}.$$

Beim Lösen des faszinierenden Problems haben wir ein sehr wichtiges Gebiet der angewandten Mathematik nur leicht gestreift. Wir haben insbesondere die nötigen Definitionen und die näheren Zusammenhänge einfach als gegeben hingenommen. Bei unterschiedlichen Anwendungen sind natürlich auch andere Codes als die Hamming-Codes einzusetzen. Hier seien nur drei Beispiele genannt. So wurde Anfang der 1970er Jahre ein *Reed-Muller-Code* eingesetzt, als die Raumsonde Mariner 9 Fotos vom Mars zur Erde übertrug. Er hat 64 Codewörter der Länge 32, die voneinander um 16 Stellen entfernt sind, und kann bis zu sieben Fehler korrigieren. Die *Reed-Solomon-Codes* dienen dazu, Informationen auf CDs und CD-ROMs vor Fehlern zu schützen. Mit ihnen können sogar 4000 aufeinanderfolgende Fehler korrigiert werden, wie sie beispielsweise von einem 2,5 mm langen Kratzer auf der Oberfläche herrühren können. Schließlich gibt es den oft nicht wahrgenommenen, mit zehn Stellen recht kurzen ISBN-Code. Bei ihm kann anhand der letzten (Prüf-)Stelle ein einzelner Fehler in der Kennnummer eines Buches (ISBN = International Standard Book Number) erkannt werden.

Nun kommen wir zum zweiten großen Beispiel in diesem Kapitel. Hier gab es beim Ermitteln der Gewinnchance die größte Konfusion.

Geh aufs Ganze!

Im zweiten Kapitel haben wir schon die Kolumne *Ask Marilyn* in der US-Zeitschrift *Parade Magazine* erwähnt. In der Ausgabe vom 9. September 1990 beantwortete Marilyn vos Santos eine Frage eines Lesers zur Gameshow *Let's Make a Deal* (sie lief in den 1980er und 1990er Jahren in Deutschland unter dem Titel *Geh aufs Ganze*). Showmaster von *Let's Make a Deal* war über 20 Jahre lang Monty Hall, der dadurch sehr populär wurde. Marilyns Antwort auf die Frage löste eine wahre Flut von Zuschriften aus. Die meisten der fast 10 000 Leserbriefschreiber, darunter auch viele Mathematiker, waren mit Marilyns Erklärung nicht einverstanden und äußerten sich teilweise schroff ablehnend bis geradezu feindselig. Einige waren überhaupt vom Niveau der mathematischen Kenntnisse in den USA enttäuscht. Wie hoch die Wellen im Jahre 1991 schlugen, zeigte sich auch daran, dass die *New York Times* sogar auf der Titelseite einen groß aufgemachten Artikel darüber brachte.

Auch in jüngerer Zeit wurde das Problem verschiedentlich aufgegriffen, so am 13. Mai 2005 in der Episode „Manhunt" der CBS-Fernsehserie *Numb3rs* und am 16. August 2005 in der Kolumne *Leaders and Letters* der Zeitschrift *Financial Times*. Einige Zuschriften hierzu wurden am 18. und 22. August abgedruckt. Schließlich sah sich der Autor, John Kay, zu zwei erläuternden Artikeln veranlasst, die am 23. und 31. August erschienen, wobei der zweite als Zusammenfassung des Monty-Hall-Problems deklariert war. Hierin bestätigte der Autor, dass es „eine umfangreiche Korrespondenz" dazu gegeben habe. Um die Schwierigkeiten ins rechte Licht zu rücken, bemerkte Kay, dass der große Paul Erdős (dem Vernehmen nach) verstorben sei, während er über dieses Problem gegrübelt habe!

Worum ging es dabei eigentlich? Wie schon erwähnt, wird das so kontrovers diskutierte Thema meist als Monty-Hall-Problem bezeichnet, weil es durch den Showmaster Monty Hall populär geworden war. In seiner Gameshow *Let's Make a Deal* wurde der Kandidat mit folgender Situation konfrontiert:

> Sie haben die Wahl zwischen drei Türen, die Sie vor sich sehen. Sie wissen, dass hinter einer Tür ein Auto steht, hinter den beiden anderen aber je eine Ziege. Sie dürfen nun eine Tür wählen und später behalten, was dahinter steht. Nehmen Sie an, Sie wählen Tür Nr. 1, dürfen Sie aber noch nicht öffnen. Der Showmaster, der weiß, was hinter jeder Tür steht, öffnet daraufhin Tür Nr. 2, hinter der eine Ziege erscheint. Dann fragt er den Kandidaten: „Wollen Sie jetzt zu Tür Nr. 3 wechseln oder bei Ihrer ersten Wahl bleiben?"

Die heftige, schier endlose Kontroverse drehte sich um die Frage: Ist es ein Unterschied, ob der Kandidat bei seiner Wahl bleibt oder ob er zur anderen noch geschlossenen Tür wechselt? Laut Marilyns Antwort sollte der Kandidat zur anderen Tür wechseln, um seine Chance zu erhöhen.

Der Showmaster zeigt, dass hinter Tür Nr. 2 eine Ziege steht. Doch das gibt dem Kandidaten offensichtlich keine weitere Information, denn er weiß ja nur, dass hinter einer der noch geschlossenen Türen eine Ziege steht. Demnach sollte es auf das Gleiche herauskommen, ob er bei Tür Nr. 1 bleibt oder zu Tür Nr. 3 wechselt. – So dachten sehr, sehr viele Leute.

Übrigens war dieses Problem auch damals nicht mehr neu. Eine Version, das Drei-Häftlinge-Rätsel, hatte der berühmte Martin Gardner schon früher präsentiert, wie auch danach noch so viele andere faszinierende mathematische Rätsel. Die genannte Version beschrieb er 1959 in seiner mathematischen Kolumne in der Zeitschrift *Scientific American* und auch 1961 in der Erstauflage seines Buches *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. Schließlich findet sich in seinem 1982 erschienenen Werk *Aha! Gotcha* das folgende Drei-Muschel-Spiel:

> Showmaster: „Auf geht's! Können Sie rauskriegen, in welcher Muschel die Perle ist? Sie verdoppeln Ihr Guthaben, wenn Sie gewinnen."
>
> Nachdem das Spiel schon eine Weile gedauert hatte, kam der Kandidat Mark zu der Überzeugung, er könne höchstens in einem von drei Fällen gewinnen.
>
> Showmaster: „Hören Sie nicht auf, Mark. Ich gebe Ihnen eine Chance. Wählen Sie irgendeine Muschel, und ich öffne danach eine leere Muschel. Dann muss sich die Perle unter einer der beiden noch geschlossenen Muscheln verbergen, und Ihre Chance steigt gewaltig."
>
> Der arme Mark hatte sein Geld schnell verspielt. Er erkannte nicht, dass das Öffnen einer leeren Muschel seine Chance keineswegs änderte. – Finden Sie heraus, warum?

Die Situation ist dabei allerdings eine andere als beim Monty-Hall-Problem, denn Mark bekommt nicht die Gelegenheit, seine Wahl der Muschel zu ändern. Wie Gardner erklärte, ist die durch das Zeigen einer leeren Muschel gegebene Information tatsächlich wertlos. Aber wenn der Kandidat seine Wahl ändern kann, sieht es anders aus. Damit kommen wir wieder zurück zu dem, wie Gardner es nannte, „wunderbar verwirrenden kleinen Problem" in der Gameshow *Let's Make a Deal.*

Hinter verschlossenen Türen

Um es vorwegzunehmen: Entscheidend sind beim Monty-Hall-Problem die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Aber schauen wir uns zuerst in Tabelle 6.2 alle Möglichkeiten an. Hinter den drei Türen A, B und C stehen zwei Ziegen und ein Auto. In der vorletzten Zeile ist vermerkt, wann der Kandidat gewinnt (g) und wann er verliert (v), wenn er bei seiner Wahl bleibt, also nicht zur anderen geschlossenen Tür wechselt. Er gewinnt in drei von neun Fällen, hat also eine Gewinnchance von $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Aber wenn er zu einer anderen Tür wechselt (letzte Tabellenzeile), gewinnt er in sechs von neun Fällen, und seine Chance ist $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Tabelle 6.2

ursprüngliche Türauswahl	A	A	A	B	B	B	C	C	C
Auto steht hinter Tür …	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Monty kann öffnen: Tür …	B, C	C	B	C	A, C	A	B	A	A, B
Kandidat bleibt	g	v	v	v	g	v	v	v	g
Kandidat wechselt	v	g	g	g	v	g	g	g	v

g = gewinnt, v = verliert

Ganz entscheidend ist natürlich, dass Monty weiß, wo das Auto steht. Andernfalls könnte er die Tür mit dem Auto dahinter öffnen, sodass das Spiel seinen Sinn verloren hätte. Würden wir die Tabelle so erweitern, dass Monty wahllos irgendeine (nicht vom Kandidaten gewählte) Tür öffnet, dann könnten wir erkennen, dass es dabei tatsächlich keine Rolle spielt, ob der Kandidat wechselt oder nicht.

Bei der Lösung des Problems greifen wir letztlich auf die Erkenntnisse des anglikanischen Geistlichen Thomas Bayes zurück, der im 18. Jahrhundert auch als Mathematiker und Statistiker wirkte. 1763, zwei Jahre nach seinem Tod, erschien in den *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* sein „Essay towards solving a problem in the doctrine of chances". Hierin führte er den Begriff der *bedingten Wahrscheinlichkeit* ein und beschrieb erstmals die später nach ihm benannte Bayes'sche Regel. Auch seine Ausführungen über die *Umkehrung des Bedingten* waren in der Entwicklung der Statistik bahnbrechend. Zu seiner Zeit war folgender Sachverhalt schon bekannt: Wenn sich in einem nicht einsehbaren Gefäß eine bekannte Anzahl w von weißen und eine bekannte Anzahl s von schwarzen Kugeln befinden, dann zieht man mit der Wahrscheinlichkeit $w/(w+s)$ eine weiße Kugel. Die schwierigere, sozusagen umgekehrte Frage lautet: Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit bei einer unbekannten Verteilung von weißen und schwarzen Kugeln, wenn schon eine oder mehrere Kugeln gezogen wurden und deren Farbe jeweils festgestellt wurde?

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \mid Y)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses X unter der Voraussetzung, dass das Ereignis Y eingetreten ist. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass *beide* Ereignisse X und Y eintreten: $P(X \cap Y) = P(X \mid Y)P(Y)$. Das bedeutet, sie ist gleich dem Produkt der bedingten Wahrscheinlichkeit von X (im Fall des Eintretens von Y) und der Wahrscheinlichkeit von Y. Bei zwei Ereignissen X und Y lautet die einfachste Formulierung der Bayes'schen Regel

$$P(Y \mid X) = \frac{P(X \mid Y)P(Y)}{P(X)}.$$

Und das ist schon alles, was wir hier brauchen. Es ist oft nützlich, die Wahrscheinlichkeit im Nenner explizit anzugeben. In unserem Fall besteht sie aus drei Anteilen für drei einander ausschließende Ereignisse R, S und T:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X \cap R) + P(X \cap S) + P(X \cap T) \\ &= P(X \mid R)P(R) + P(X \mid S)P(S) + P(X \mid T)P(T). \end{aligned}$$

Beim Monty-Hall-Problem können wir die folgenden Ereignisse definieren:

A das Ereignis, dass das Auto hinter der Tür A steht,
B das Ereignis, dass das Auto hinter der Tür B steht,

C das Ereignis, dass das Auto hinter der Tür C steht,
M_{A} das Ereignis, dass Monty die Tür A öffnet, usw.

Wenn der Kandidat zu Beginn die Tür A gewählt hat, dann wissen wir, dass Monty beim Öffnen zwischen den Türen B und C wählen kann. Also gelten folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(M_{\mathrm{B}} \mid A) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(M_{\mathrm{B}} \mid B) = 0, \qquad P(M_{\mathrm{B}} \mid C) = 1.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} P(M_{\mathrm{B}}) &= P(M_{\mathrm{B}} \mid A)P(A) + P(M_{\mathrm{B}} \mid B)P(B) \\ &\quad + P(M_{\mathrm{B}} \mid C)P(C) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + 0 \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt kann der Kandidat bei seiner Tür bleiben oder zur anderen noch geschlossenen Tür wechseln. Wenn er bei der Tür A bleibt, beträgt seine Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen:

$$P(A \mid M_{\mathrm{B}}) = \frac{P(M_{\mathrm{B}} \mid A)P(A)}{P(M_{\mathrm{B}})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

Aber wenn er zur Tür C wechselt, wird die Wahrscheinlichkeit doppelt so hoch:

$$P(C \mid M_{\mathrm{B}}) = \frac{P(M_{\mathrm{B}} \mid C)P(C)}{P(M_{\mathrm{B}})} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}.$$

Es gibt schier unzählige Variationen dieses Themas. Eine Erweiterung wurde von John P. Georges und Timothy V. Craine im Jahre 1995 unter dem Titel „Generalising Monty’s Dilemma“ in der Zeitschrift *Quantum Magazine* (5(4):16–21) beschrieben.

Ein Auto und viele Ziegen

Für den Kandidaten natürlich ungünstiger ist folgende Situation: Er sieht sich n Türen gegenüber, von denen eine Tür das Auto und die anderen $n - 1$ Türen je eine Ziege verbergen.

Wenn der Kandidat bei der ursprünglichen Auswahl einer Tür bleibt, gewinnt er das Auto mit der Wahrscheinlichkeit $1/n$. Öffnet Monty nun eine Tür mit einer Ziege dahinter, dann gibt es $n - 2$ noch geschlossene Türen, hinter denen eine Ziege stehen kann. Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kandidat durch Wechseln seiner gewählten Tür gewinnt, wird beschrieben durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}&P(\text{eine Ziege hinter der ersten Tür})\\&\qquad\cdot P(\text{das Auto hinter der zweiten Tür,}\\&\qquad\text{falls eine Ziege hinter der ersten Tür steht})\\&\qquad\qquad=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Die Ungleichung rührt daher, dass $(n-1)/(n-2) > 1$ ist. Es ist für den Kandidaten immer besser, die gewählte Tür zu wechseln, anstatt bei der ersten Wahl zu bleiben. Einsetzen von $n = 3$ in die letzte Gleichung liefert uns die oben schon berechnete Wahrscheinlichkeit bei drei Türen.

Viele Autos und viele Ziegen

Jetzt wird es für den armen Kandidaten ganz schwierig: Er steht vor n Türen, hinter denen sich c $(\geqslant 1)$ Autos und daher $n - c$ Ziegen verbergen. Wenn der Kandidat außerdem nicht weiß, welchen Wert c hat (d. h. wie viele Autos es gibt), dann kann Monty eine Tür mit einer Ziege oder auch mit einem Auto zeigen, ohne alles zu verraten.

Wenn Monty eine Ziege zeigt, dann ist $1 \leqslant c \leqslant n-2$. Doch wenn er ein Auto zeigt, dann ist $2 \leqslant c \leqslant n-1$. In beiden Fällen beträgt die Wahrscheinlichkeit c/n, ein Auto zu gewinnen.

Nehmen wir erst einmal an, dass Monty eine Ziege zeigt. Wenn der Kandidat mit der Strategie des Wechselns gewinnt, dann hat er entweder zuerst eine Tür mit einer Ziege und danach eine Tür mit einem Auto gewählt, oder er hat zuerst eine Tür mit einem Auto und danach eine Tür mit einem Auto gewählt.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind

$$\frac{n-c}{n}\cdot\frac{c}{n-2}\qquad\text{bzw.}\qquad\frac{c}{n}\cdot\frac{c-1}{n-2}.$$

Sie ergeben die kombinierte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\frac{n-c}{n}\cdot\frac{c}{n-2}+\frac{c}{n}\cdot\frac{c-1}{n-2}&=\frac{c}{n(n-2)}\,(n-c+c-1)\\&=\frac{(n-1)c}{(n-2)n}>\frac{c}{n}.\end{aligned}$$

Und nun nehmen wir an, dass Monty ein Auto zeigt. Wenn der Kandidat hierbei mit der Strategie des Wechselns gewinnt, dann hat er (genau wie zuvor) entweder zuerst eine Tür mit einer Ziege und danach eine Tür mit einem Auto gewählt, oder er hat zuerst eine Tür mit einem Auto und danach eine Tür mit einem Auto gewählt.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind

$$\frac{n-c}{n}\cdot\frac{c-1}{n-2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{c}{n}\cdot\frac{c-2}{n-2}.$$

Sie ergeben die kombinierte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\frac{n-c}{n}\cdot\frac{c-1}{n-2}+\frac{c}{n}\cdot\frac{c-2}{n-2} &= \frac{c-1}{n}\cdot\frac{n-c}{n-2}+\frac{c}{n}\cdot\frac{c-2}{n-2}\\ &< \frac{c}{n}\cdot\frac{n-c}{n-2}+\frac{c}{n}\cdot\frac{c-2}{n-2} = \frac{c}{n}\left(\frac{n-c}{n-2}+\frac{c-2}{n-2}\right)\\ &= \frac{c}{n}.\end{aligned}$$

Wir können daraus schließen: Wenn Monty eine Ziege zeigt, sollte der Kandidat wechseln, aber wenn Monty ein Auto zeigt, sollte der Kandidat bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben. – Zum Schluss betrachten wir eine noch trickreichere Variante.

Das mehrstufige Monty-Hall-Problem

Bei der ursprünglichen Gameshow *Let's Make a Deal* konnte der Kandidat zwischen drei Türen wählen. Gemäß den Regeln hatte er zwei Entscheidungen zu treffen: Beim ersten Schritt traf er die ursprüngliche Wahl der Tür, und beim zweiten entschied er sich dafür, diese Wahl beizubehalten oder sie zu ändern. – Aber jetzt soll es vier Türen geben, wobei auch nur hinter einer Tür ein Auto steht. Doch der Kandidat hat eine weitere Wahlmöglichkeit.

Monty Hall erklärt:

> Sie wählen eine der Türen, und ich öffne dann eine Tür mit einer Ziege dahinter. Dann entscheiden Sie, ob Sie bei Ihrer ursprünglichen Wahl bleiben oder zu einer der restlichen Türen wechseln wollen. Danach öffne ich eine weitere Tür mit einer Ziege dahinter. Sie können sich wiederum entscheiden, ob Sie bei der zuvor gewählten Tür bleiben oder ob Sie zur einzigen verbleibenden Tür wechseln wollen.

Hierbei hat der Kandidat drei Entscheidungen zu treffen: im ersten Schritt die ursprüngliche Wahl einer Tür, im zweiten die erste Wahl zwischen Bleiben und Wechseln und im dritten die zweite Wahl zwischen Bleiben und Wechseln.

Tabelle 6.3

Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Gewinnchance
Auswahl	Bleiben	Bleiben	0,250
Auswahl	Wechseln	Bleiben	0,375
Auswahl	Bleiben	Wechseln	0,750
Auswahl	Wechseln	Wechseln	0,625

Schauen wir uns einen beispielhaften Ablauf an:

Schritt 1: Wahl einer Tür Der Kandidat wählt Tür A, sodass Monty eine der Türen B, C und D öffnen kann. Er öffnet Tür B, und dem Kandidaten stehen dann noch die Türen A, C und D zur Verfügung.

Schritt 2: Entscheidung für Wechseln Der Kandidat wählt nun Tür C, sodass Monty eine der Türen A und D öffnen kann. Monty öffnet Tür D, sodass dem Kandidaten noch die Türen A und C zur Verfügung stehen.

Schritt 3: Entscheidung für Bleiben Der Kandidat bleibt nun bei Tür C (zu der er im vorigem Schritt gewechselt war).

Eine genauere Untersuchung dieser Variante verdanken wir M. Bhaskara Rao vom Department für Statistik an der Universität North Dakota („On a game-show problem of Marilyn vos Savant and its extensions", 1992, *American Statistician* 46:241–42). Er behandelte hier auch den allgemeinen Fall mit n Türen und $n - 1$ Entscheidungen des Kandidaten. In Tabelle 6.3 sind seine Ergebnisse für unser Beispiel mit vier Türen zusammengefasst.

Bei der ursprünglichen Version des Monty-Hall-Problems sollte der Kandidat zur anderen Tür wechseln, nachdem Monty eine Tür geöffnet hatte. Daher könnte man vermuten, dass er hier (bei vier Türen und drei Entscheidungen) nicht nur im Schritt 2, sondern auch im Schritt 3 wechseln sollte. Aber der Tabelle 6.3 können wir entnehmen, dass er im Schritt 2 bleiben und im Schritt 3 wechseln sollte, um die größte Chance zu haben. Das widerspricht wieder einmal unseren Erwartungen. Allgemein gilt: Bei einem mehrstufigen Monty-Hall-Problem sollte der Kandidat zunächst bei der anfänglichen Auswahl bleiben und erst im letzten Schritt wechseln.

Die verblüffende Natur der Aufgabe wird in Mark Haddons bemerkenswertem Buch *The Curious Incident of the Dog in the Night-time*, (etwa: „Der seltsame Vorfall mit dem Hund zur Nachtzeit") treffend beschrieben:

> Das zeigt auch, dass Mr. Jeavons Unrecht hatte und dass Zahlen manchmal sehr kompliziert und überhaupt nicht einleuchtend sind. Eben deshalb mag ich das Monty-Hall-Problem.

Damit sind wir am Ende unserer kurzen Betrachtung eines kontrovers diskutierten Effekts. Aber ich habe noch etwas für Liebhaber des Kartenspiels Bridge. Bei Monty Hall hatten wir Folgendes gesehen: Der Kandidat wählt zu Beginn in zwei von drei Fällen eine Tür mit einer Ziege, sodass in eben diesen zwei von drei Fällen Monty beim Öffnen einer Tür mit einer Ziege dahinter keine Auswahl hat. Diesen Sachverhalt können wir auf das Prinzip der *beschränkten Auswahl* beim Bridge übertragen. Wenn die Nord-Süd-Partei die Karten A B 10 7 6 – 5 4 3 2 hält, ist das *Schneiden des Buben wie auch der 10* die optimale Spielstrategie. Aber mit den Karten A D 10 7 6 – 5 4 3 2 sollte sie am besten *die Dame schneiden und dann das Ass spielen*. Den Grund dafür können Bridge-Spieler sicherlich erkennen. Ratschläge für derartige Strategien beschrieb auch der inzwischen verstorbene Bridge-Spezialist Alan Truscott. In seiner Kolumne in der *New York Times* wies er im Jahre 1991 übrigens darauf hin, dass er sich schon rund 40 Jahre lang mit Bridge beschäftigt hatte. – Doch die vielleicht hilfreichste Antwort finden wir in der Zen-Philosophie: Es ist gleichgültig, wie du dich entscheidest. Wenn du gewinnen willst, hast du schon verloren.