✉ Umgeben von Mathematik 5

Liebe Meg,

ich bin nicht überrascht, dass Du von Deinem bevorstehenden Gang an die Universität „gleichzeitig begeistert und ein wenig eingeschüchtert“ bist. Ich möchte Deine gute Einfühlungsgabe in jeder Hinsicht loben. Du wirst sehen, dass der Wettbewerb härter ist, das Tempo höher, die Arbeit schwerer und der Inhalt viel interessanter. Du wirst von Deinen Dozenten (jedenfalls von einigen) und von den Ideen, die zu entdecken sie Dich lehren, begeistert sein. Du wirst entmutigt sein, weil viele Deiner Kommilitonen diese Ideen scheinbar viel früher entdecken. Während der ersten sechs Monate wirst Du Dich fragen, wieso man Dich überhaupt zur Universität zugelassen hat. (Danach wirst Du Dich fragen, wieso man viele von den anderen zugelassen hat.)

Du hast mich gebeten, Dir etwas Inspirierendes zu erzählen. Nichts Technisches, einfach irgendetwas, woran Du Dich halten kannst, wenn der Weg gar zu steinig wird.

Sehr gut.

Wie viele Mathematiker beziehe ich meine Inspiration aus der Natur. Die Natur sieht vielleicht nicht sehr mathematisch aus; man sieht keine Additionen auf Baumstämmen. Aber in der Mathematik geht es nicht wirklich um Zahlen. Mathematik handelt von Mustern und der Frage, warum sie auftauchen. Die Muster der Natur sind ebenso schön wie unerschöpflich.

Ich bin gerade auf einer Forschungsreise in Houston, Texas, und umgeben von Mathematik.

Houston ist eine riesige, großflächige Stadt, flach wie ein Pfannkuchen. Früher war dort ein Sumpf, und bei schweren Unwettern scheint die Stadt in ihren natürlichen Zustand zurückkehren zu wollen. In der Nähe des Apartments, in dem meine Frau und ich immer wohnen, wenn wir in Houston sind, gibt es einen betonierten Kanal, der jede Menge Regen ableitet. Manchmal schafft er das nicht ganz; vor ein paar Jahren war die nahe gelegene Autobahn zehn Meter hoch überflutet, und auch unser Apartment stand unter Wasser. Aber er tut seine Dienste. Man nennt ihn Braes Bayou; auf beiden Ufern gibt es einen Pfad. Avril und ich machen gerne Spaziergänge am Bayou entlang. Die betonierten Ufer sind nicht wirklich hübsch, aber immer noch hübscher als die Straßen und Parkplätze in der Gegend, und es gibt eine vielfältige Tierwelt: Welse im Fluss, Silberreiher auf der Jagd nach Fischen und viele andere Vögel.

Während ich, umgeben von Tieren, am Bayou entlang spaziere, wird mir klar, dass ich außerdem von Mathematik umgeben bin.

Zum Beispiel …

Straßen überqueren den Bayou in regelmäßigem Abstand, und auch die Telefonleitungen überspannen ihn. Auf den Leitungen hocken Vögel. Aus der Ferne sieht das Ganze aus wie Notenblätter – fette kleine Kleckse auf Reihen horizontaler Linien. Anscheinend haben die Vögel Lieblingsplätze, obwohl mir nicht recht klar ist, warum. Aber eines sticht ins Auge: Wenn viele Vögel auf einer Leitung sitzen, dann tun sie das *in gleichem Abstand*.

Das ist ein mathematisches Muster, und ich denke, dass es dafür eine mathematische Erklärung gibt. Ich glaube nicht, dass die Vögel „wissen“, dass sie gleichmäßigen Abstand halten sollten. Aber jeder Vogel hat seinen eigenen „persönlichen Raum“, und wenn ein anderer Vogel zu nahe kommt, dann hüpft er auf dem Draht ein wenig zur Seite, um mehr Platz zu haben, es sei denn, es gibt einen Vogel auf der anderen Seite, der sich zu nahe herandrängelt.

Wenn nur wenige Vögel auf der Leitung sitzen, dann verteilen sie sich zufällig. Sind es aber viele, dann müssen sie enger zusammenrücken. Da die Vögel auf der Leitung zur Seite rücken, um sich wohler zu fühlen, gleicht der „Bevölkerungsdruck“ ihre Abstände aus. Vögel am Rand von dicht bevölkerten Regionen werden in weniger volle Gebiete verdrängt. Und da alle Vögel der gleichen Spezies angehören (in der Regel sind es Tauben), haben sie auch eine sehr ähnliche Vorstellung davon, wie groß der persönliche Raum sein sollte. Und so ordnen sie sich in gleichen Abständen an.

Natürlich nicht in *ganz genau* gleichen Abständen. Das wäre ein platonisches Ideal. Es hilft uns aber, eine etwas unordentlichere Realität zu verstehen.

Du könntest dieses Problem auch mathematisch angehen, wenn Du wolltest. Schreibe einige einfache Regeln auf, wie sich die Vögel bewegen, wenn ihnen ein Nachbar zu nahe kommt, setze einige Vögel nach dem Zufallsprinzip auf die Leitung, wende die Regeln an und beobachte, wie sich die Abstände entwickeln. Es gibt jedoch eine Analogie zu einem verbreiteten physikalischen System, bei dem man die Regeln bereits mathematisch ausgearbeitet hat, und diese Analogie sagt Dir, was Du erwarten kannst.

Es geht um den *Vogelkristall.*

Der gleiche Prozess, der Vögel dazu veranlasst, sich in regelmäßigen Abständen auszurichten, bringt die Atome in einem festen Körper dazu, sich in einem sich wiederholenden Gittermuster aufzureihen. Auch Atome haben einen „persönlichen Raum“: Sie stoßen einander ab, wenn sie sich zu nahe kommen. In einem festen Körper müssen die Atome eng aneinander rücken, aber indem sie ihren persönlichen Raum abstimmen, ordnen sie sich in einem eleganten Kristallgitter an.

Das Vogelgitter ist eindimensional, da alle Vögel auf einem Draht sitzen. Ein eindimensionales Gitter besteht aus Punkten in gleichem Abstand. Wenn nur einige Vögel auf dem Draht hocken – zufällig angeordnet und ohne Bevölkerungsdruck –, dann ist das kein Kristall, sondern ein Gas.

Dies ist nicht nur eine vage Analogie. *Derselbe* mathematische Prozess, der zur Bildung eines regelmäßigen Salzkristalls oder von Kalkspat führt, erschafft auch meinen „Vogelkristall“.

Und das ist nicht die einzige mathematische Entdeckung, die man am Braes Bayou machen kann.

Viele Menschen führen ihre Hunde am Kanal aus. Wenn Du einen Hund beim Laufen beobachtest, wirst Du schnell bemerken, wie rhythmisch seine Bewegung ist. Das gilt nicht, wenn er stehen bleibt, um an einem Baum oder einem anderen Hund zu schnüffeln. Der Gang ist nur rhythmisch, wenn der Hund glücklich und ohne einen Gedanken in seinem Kopf vor sich hin trottet. Der Schwanz wedelt, die Zunge hängt heraus und die Füße berühren den Boden in einem sorglosen Hundetanz.

Was machen die Füße genau?

Wenn der Hund läuft, gibt es ein charakteristisches Muster: links *hinten*, links *vorne*, rechts *hinten*, rechts *vorne*. Die Schritte erfolgen im gleichen zeitlichen Abstand, als wären sie Musiknoten – vier Schläge pro Takt.

Erhöht der Hund sein Tempo, dann wird aus dem Gang ein Trab. Jetzt hat ein diagonales Beinpaar gleichzeitig Bodenkontakt – links hinten und rechts vorne, danach das andere Paar, und nun gibt es zwei Schläge pro Takt. Würde man zwei Menschen, die exakt im Gegenschritt hintereinander herlaufen, in ein Kuhkostüm stecken, dann hätten wir eine trabende Kuh.

Der Hund ist Fleisch gewordene Mathematik. Der Gegenstand, für den er ein unwissentliches Beispiel ist, nennt sich Ganganalyse, die in der Medizin große Bedeutung hat: Menschen haben oft – vor allem als Kleinkind oder im hohen Alter – Probleme, ihre Beine angemessen zu bewegen. Eine Analyse ihrer Bewegungen kann die Natur des Problems aufdecken und zu seiner Heilung beitragen. Ein anderer Anwendungsbereich ist die Robotik: Roboter mit Beinen können sich auf Gelände bewegen, das für Roboter mit Rädern ungeeignet ist: im Inneren eines Atomkraftwerks, auf einem Truppenschießgelände oder auf der Oberfläche des Mars. Wenn wir die Fortbewegung mithilfe von Beinen erst einmal richtig verstehen, dann können wir verlässliche Roboter bauen, die alte Kernkraftwerke stilllegen, nicht explodierte Granaten und Minen lokalisieren und ferne Planeten erforschen. Im Moment setzen wir immer noch auf Mars-Rover mit Rädern: Sie sind verlässlich, auch wenn ihr Einsatzgebiet begrenzt ist. Aber die US-Armee verwendet immerhin Roboter mit Beinen für einige Aufräumarbeiten auf Schießgeländen.

Wenn wir lernen, das Bein neu zu erfinden, wird sich all das ändern.

Silberreiher stehen mit ihrer typischen hellwachen Haltung in den Untiefen, die langen Schnäbel scheinen zu schweben, die Muskeln sind angespannt: Sie jagen Welse. Gemeinsam bilden sie ein Mini-Ökosystem, ein Räuber-Beute-System. Die Verbindung von Ökologie und Mathematik reicht zurück bis zu Leonardo aus Pisa, auch bekannt als Fibonacci. Im Jahre 1202 schrieb Fibonacci in seinem *Liber Abaci* über ein ziemlich einfaches Modell des Bevölkerungswachstums bei Kaninchen. Um der Wahrheit willen sei erwähnt, dass das Buch eigentlich vom hindu-arabischen Zahlensystem handelt, dem Vorläufer des heutigen Zehnersystems, und das Kaninchenmodell hauptsächlich als arithmetische Übung dient. Die meisten anderen Übungen betreffen Währungstransaktionen. Es war ein sehr praktisches Buch.

In den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts entwickelten sich ernsthaftere ökologische Modelle: Der italienische Mathematiker Vito Volterra versuchte eine seltsame Erscheinung zu erklären, die von Fischern in der Adria beobachtet worden war. Während des Ersten Weltkrieges ging der Fischfang zurück; in dieser Zeit schien die Zahl der Beutefische nicht zuzunehmen, wohl aber die der Haie und Rochen.

Volterra fragte sich, wieso eine Abnahme des Fischfanges den Räubern mehr nutzte als der Beute. Also ersann er ein mathematisches Modell, das auf der Größe der Hai- und Beutefischpopulationen beruhte und der Frage nachging, in welcher Weise sie einander beeinflussten. Er entdeckte, dass sich die Größe der Populationen nicht bei festen Werten einpendelt, sondern rhythmischen Zyklen unterliegt: Große Populationen wurden zuerst kleiner, wuchsen dann aber rasant. Die Haipopulation erreichte einige Zeit nach den Beutefischen ihren Gipfelwert.

Man benötigt keine Zahlen, um das zu verstehen. Bei einer beschränkten Anzahl von Haien können sich die Beutefische schneller reproduzieren, als sie gefressen werden, also schnellt ihre Zahl in die Höhe. Damit haben die Haie mehr Nahrung, und auch ihre Population beginnt zu wachsen. Aber sie reproduzieren sich langsamer, so dass eine Verzögerung eintritt. Wenn die Zahl der Haie zunimmt, fressen sie mehr Beutefische, und schließlich gibt es so viele Haie, dass die Zahl der Beutefische abzunehmen beginnt. Jetzt gibt es nicht mehr genug Beutefische für die vielen Haie, und so beginnt auch die Zahl der Haie zu sinken – wiederum mit einer Verzögerung. Wenn die Zahl der Haie gesunken ist, können die Beutefische sich wieder vermehren … und so weiter.

Mathematik macht diese Geschichte kristallklar (im Rahmen der Annahmen, die in das Modell eingebaut sind). Mit Mathematik können wir auch herausarbeiten, wie sich die durchschnittliche Population während eines vollständigen Zyklus verhält – was man mit Worten alleine nicht erklären kann. Nach Volterras Berechnungen lässt ein verminderter Fischfang die Durchschnittszahl der Beutefische während eines Zyklus sinken, die der Haie aber steigen. Und genau das geschah während des Ersten Weltkrieges.

All die Beispiele, von denen ich Dir bisher erzählte, beinhalten „fortgeschrittene" Mathematik. Aber selbst einfache Mathematik kann erleuchtend wirken. Ich erinnere mich an eine der vielen Geschichten, die sich Mathematiker erzählen, wenn alle Nichtmathematiker gegangen sind: Eine Mathematikerin an einer berühmten Universität wollte sich einen neuen Hörsaal ansehen. Sie traf dort auf den Dekan der Fakultät, der an die Decke starrte und vor sich hin murmelte: „… 45, 46, 47 …" Sie unterbrach ihn und fragte, was er da tue. „Ich zähle die Lampen", sagte der Dekan. Die Mathematikerin schaute hinauf zu dem perfekten Rechteck aus Lampen und meinte: „Das ist doch einfach, in die eine Richtung sind es … zwölf, und in die andere … acht. 12 mal 8 sind 96." „Nein, nein", antwortete der Dekan ungeduldig. „Ich will die *genaue* Zahl wissen."

Selbst wenn es um so etwas Einfaches wie das Zählen geht, sehen wir Mathematiker die Welt anders als andere Menschen.